

УДК 531.38

©2006. М.П. Харламов

ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ

Работа завершает цикл исследований бифуркационных диаграмм гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение осесимметричного твердого тела с условиями типа Ковалевской в двойном силовом поле. Получены явные неравенства, определяющие множество критических значений первых интегралов на поверхностях, несущих бифуркационную диаграмму (Харламов М.П., МТТ, 2004, вып. 34). Выполнено построение всех диаграмм на изоэнергетических уровнях, тип которых устойчив относительно малых изменений физических параметров и постоянной интеграла энергии.

1. Предварительные сведения. Задача о движении волчка Ковалевской в двойном силовом поле описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + \beta_3, & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2 \end{aligned} \quad (123).$$

Здесь и в дальнейшем используются соглашения и обозначения работы [1]. Символ (123) означает, что невыписанные уравнения второй группы получаются из приведенных циклической перестановкой индексов. Как показано в [1], без ограничения общности можно полагать характеристические векторы силовых полей α, β взаимно ортогональными и ограничить систему (1) на многообразии P^6 , заданное в пространстве $\mathbf{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$ геометрическими интегралами

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = a^2, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = b^2, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \quad (2)$$

Полагаем для определенности $a \geq b \geq 0$. Если $a > b > 0$, то система (1), (2) гамильтонова с тремя степенями свободы, не имеет явных групп симметрий и не сводится к семейству гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Полную интегрируемость по Лиувиллю обеспечивают интегралы в инволюции [2, 3]

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2), \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\ G &= (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3)^2 + (\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3)^2 + \\ &\quad + \omega_3(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_3) - \alpha_1b^2 - \beta_2a^2 \end{aligned} \quad (3)$$

(γ_i – компоненты в подвижных осях вектора $\alpha \times \beta$).

В работах [1, 4] найдено множество критических точек $c(J)$ интегрального отображения $J = H \times K \times G : P^6 \rightarrow \mathbf{R}^3$ и указаны уравнения поверхностей в пространстве $\mathbf{R}^3(h, k, g)$, несущих в себе бифуркационную диаграмму $\Sigma(J)$ отображения J . Оказалось, что $c(J)$ представимо в виде объединения трех инвариантных подмножеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{D}$, каждое из которых является почти всюду гладким четырехмерным многообразием и в гладкой части задается в P^6 системой двух инвариантных соотношений.

Первое множество \mathfrak{M} было ранее указано в [2] как многообразие частной интегрируемости системы (1). Оно совпадает с нулевым уровнем интеграла K . Следовательно, этот класс движений обобщает 1-й класс Аппельрота [5] движений волчка Ковалевской в поле силы тяжести [6]. Фазовая топология этого случая (без учета интегрируемости системы в целом) изучена Д.Б. Зотьевым [7]. Множество \mathfrak{N} найдено в [8] как обобщение семейства особо замечательных движений 2-го и 3-го классов Аппельрота. Движения на \mathfrak{N} полностью исследованы в [9, 10]. Свойства системы, индуцированной на множестве \mathfrak{D} (обобщение 4-го класса Аппельрота), изучались в работе [11]. Относительно бифуркационной диаграммы в работах [1, 4] показано, что

- 1) $J(\mathfrak{M}) \subset \Sigma_1$, где $\Sigma_1 = \{k = 0\}$;
- 2) $J(\mathfrak{N}) \subset \Sigma_2$, где $\Sigma_2 = \{(2g - p^2h)^2 - r^4k = 0\}$;
- 3) $J(\mathfrak{D}) \subset (\Sigma_3 \cup \Sigma_4)$, где Σ_3 – пара прямых

$$g = \pm abh, \quad k = (a \mp b)^2, \quad (4)$$

а Σ_4 – поверхность кратных корней многочлена $\psi(s) = s^2(s - h)^2 + (p^2 - k)s^2 - 2gs + \gamma^2$, который при исчезновении второго силового поля обращается в резольвенту Эйлера второго многочлена Ковалевской. Здесь введены положительные параметры p, r, γ : $p^2 = a^2 + b^2$, $r^2 = a^2 - b^2$, $\gamma = ab$. Уравнение дискриминантной поверхности Σ_4 в форме $D(h, k, g) = 0$ неразрешимо явно относительно какой-либо из переменных h, k, g . В дальнейшем удобно считать h и s независимыми параметрами на Σ_4 . Тогда система $\psi(s) = 0$, $\psi'(s) = 0$ дает зависимости g, k от s, h на Σ_4 :

$$g = s^2(h - s) + \frac{\gamma^2}{s}, \quad k = 3s^2 - 4hs + h^2 + p^2 - \frac{\gamma^2}{s^2}. \quad (5)$$

В работе [4] сформулирована задача полного описания бифуркационной диаграммы $\Sigma = \Sigma(J)$ путем нахождения условий на постоянные первых интегралов, определяющих Σ в объединении $\tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$. Точки множества $\Sigma \cap \Sigma_i$ будем для краткости называть допустимыми точками листа Σ_i . Предложено искать условия допустимости на сечениях бифуркационной диаграммы плоскостями, параллельными плоскости Ogk . Тем самым значение энергии h выбирается в качестве параметра, что соответствует исследованию бифуркационных диаграмм Σ^h пары интегралов G, K на изоэнергетических уровнях $\{\zeta \in P^6 : H(\zeta) = h\}$. В работах [12, 4] намечен следующий подход к решению поставленной задачи. Представим множество критических точек $c(J)$ как объединение непересекающихся множеств $\mathfrak{C}^{(i)} = \{\zeta \in c(J) : \text{rank } J(\zeta) = i\}$. Тогда Σ можно рассматривать как двумерный клеточный комплекс; объединение $\mathfrak{S}^{(i)}$ клеток размерности i ($0 \leq i \leq 2$) совпадает с $J(\mathfrak{C}^{(i)})$. Очевидно, что $\partial \mathfrak{S}^{(2)} \subset \mathfrak{S}^{(0)} \cup \mathfrak{S}^{(1)}$, $\partial \mathfrak{S}^{(1)} \subset \mathfrak{S}^{(0)}$, т.е. фактические граничные точки допустимых множеств на листах Σ_i (точки Σ_i , через которые бифуркационная диаграмма не может быть гладко продолжена в рассматриваемом листе или на другой лист, касающийся его в данной точке) содержатся в образе множества $\{\zeta \in c(J) : \text{rank } J(\zeta) < 2\}$. Поэтому для того чтобы получить граничные условия для $\Sigma \subset \tilde{\Sigma}$, необходимо указать все траектории в фазовом пространстве задачи, на которых ранг интегрального отображения падает более, чем на единицу, т.е. $\text{rank } J = 0$ или $\text{rank } J = 1$. Ниже найдены все такие движения и, путем рассмотрения их образов на листах поверхности $\tilde{\Sigma}$, получены явные неравенства, определяющие бифуркационную диаграмму. Построены все сечения Σ^h в зависимости от постоянной интеграла энергии и физических параметров задачи.

2. Случай сильного падения ранга интегрального отображения. Отметим некоторые факты, имеющие место для произвольного осесимметричного тела, вращающегося в двух независимых постоянных полях с центрами приложения в экваториальной плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.[13] При условии $a \neq b \neq 0$ уравнения движения тела имеют на P^6 ровно четыре положения равновесия c_j ($j = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} c_0 : \quad \omega &= 0, \quad \alpha = \mathbf{e}_1, \quad \beta = \mathbf{e}_2; \quad H(c_0) = -a - b; \\ c_1 : \quad \omega &= 0, \quad \alpha = \mathbf{e}_1, \quad \beta = -\mathbf{e}_2; \quad H(c_1) = -a + b; \\ c_2 : \quad \omega &= 0, \quad \alpha = -\mathbf{e}_1, \quad \beta = \mathbf{e}_2; \quad H(c_2) = a - b; \\ c_3 : \quad \omega &= 0, \quad \alpha = -\mathbf{e}_1, \quad \beta = -\mathbf{e}_2; \quad H(c_3) = a + b. \end{aligned}$$

При этом индекс Морса энергии H в точке c_j равен j . В частности, c_0 – точка глобального минимума H .

Отсюда следует также, что все изоэнергетические многообразия связны. Это свойство оказывается весьма полезным при глобальном исследовании областей существования произвольных (не обязательно критических движений), так как тогда любая непрерывная функция при фиксированной энергии принимает все значения от наименьшего до наибольшего, а эти последние фактически устанавливаются ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.[1] Уравнения движения тела имеют на P^6 следующие семейства решений маятникового типа:

$$\alpha \equiv \pm a \mathbf{e}_1, \quad \beta = b(\mathbf{e}_2 \cos \theta - \mathbf{e}_3 \sin \theta), \quad \omega = \theta' \mathbf{e}_1, \quad 2\theta'' = -b \sin \theta; \quad (6)$$

$$\alpha = a(\mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta), \quad \beta \equiv \pm b \mathbf{e}_2, \quad \omega = \theta' \mathbf{e}_2, \quad 2\theta'' = -a \sin \theta; \quad (7)$$

$$\alpha = a(\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta), \quad \beta = \pm b(\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta), \quad \omega = \theta' \mathbf{e}_3, \quad \theta'' = -(a \pm b) \sin \theta. \quad (8)$$

Вернемся к обобщенному волчку Ковалевской. Напомним, что $\mathfrak{M} = \{K = 0\} \subset P^6$ и $J(\mathfrak{M}) = \Sigma_1 \cap \Sigma$. Известно [7], что

$$(p^2 H - 2G)|_{\mathfrak{M}} \equiv \frac{1}{2} F^2, \quad (9)$$

где $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbf{R}$ – частный интеграл О.И. Богоявленского. Константу этого интеграла обозначим через f . Обозначим $H^{(1)} = H|_{\mathfrak{M}}$ и рассмотрим интегральное отображение $J^{(1)} = H^{(1)} \times F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbf{R}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.[7] Бифуркационная диаграмма отображения $J^{(1)}$ есть множество решений уравнения

$$[27f^4 - 9(h^2 - 2p^2)(2hf^2 + r^4) + 2(h^2 - 2p^2)^3]^2 - 4[(h^2 - 2p^2)^2 - 3(2hf^2 + r^4)]^3 = 0 \quad (10)$$

в области $\{h \geq -2b\}$. Множество допустимых значений $J^{(1)}$ определяется неравенствами $|f| \leq f_0(h)$, $h \geq -2b$, где через $f_0(h)$ обозначен наибольший положительный корень уравнения (10) относительно f .

Вообще говоря, из зависимости функций $H^{(1)}, F$ на подмногообразии $\mathfrak{M} \subset P^6$, даже при том, что на \mathfrak{M} всюду $dK \equiv 0$, не следует, что в этих же точках $\text{rank } J = 1$. Однако ниже будет показано, что это действительно так. В следующих утверждениях

содержится полное описание множества $\mathfrak{C}^{(0)} \cup \mathfrak{C}^{(1)}$ и его образа в пространстве констант первых интегралов.

ТЕОРЕМА 1. Ранг отображения J равен нулю в точности в положениях равновесия тела. Все четыре положения равновесия принадлежат $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}$. В частности, их J -образы принадлежат одновременно Σ_2, Σ_3 и Σ_4 . На плоскости (s, h) им соответствуют точки

$$\begin{aligned} Q_{01} &= (-a, -(a+b)), & Q_{02} &= (-b, -(a+b)); \\ Q_{11} &= (-a, -(a-b)), & Q_{12} &= (b, -(a-b)); \\ Q_{21} &= (a, a-b), & Q_{22} &= (-b, a-b); \\ Q_{31} &= (a, a+b), & Q_{32} &= (b, a+b). \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Если ранг отображения J равен нулю, то в такой точке обязательно $dH = 0$. Это имеет место лишь в положениях равновесия соответствующей гамильтоновой системы, т.е. в неподвижных точках системы (1), (2). Они описаны в предложении 1. Непосредственно проверяется, что в этих точках $dG = 0, dK = 0$. Поэтому $\mathfrak{C}^0 = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$. Обозначим $P_j = J(c_j)$. Координаты P_j вычисляются из (3)

$$\begin{aligned} P_0 : & \quad h = -(a+b), \quad g = -ab(a+b), \quad k = (a-b)^2; \\ P_1 : & \quad h = -(a-b), \quad g = ab(a-b), \quad k = (a+b)^2; \\ P_2 : & \quad h = a-b, \quad g = -ab(a-b), \quad k = (a+b)^2; \\ P_3 : & \quad h = a+b, \quad g = ab(a+b), \quad k = (a-b)^2 \end{aligned}$$

и, очевидно, удовлетворяют одному из соотношений (4) и уравнению поверхности Σ_2 . Подставим эти значения в (5) с тем, чтобы проверить существование решения относительно s . Получим выражения (11). Поэтому $P_j \in \Sigma_4$. Здесь следует отметить, что отображение (5) плоскости (s, h) в Σ_4 не взаимнооднозначно. \square

ТЕОРЕМА 2. Траектории, удовлетворяющие условиям $\text{rank } J = 1$ и $dK \neq 0$, исчерпываются движениями (6), (7). Соответствующие значения первых интегралов заполняют кривые

$$\begin{aligned} \lambda_1 : & \quad g = a^2h + ar^2, \quad k = (h+2a)^2, \quad h \geq -(a+b); \\ \lambda_2 : & \quad g = a^2h - ar^2, \quad k = (h-2a)^2, \quad h \geq a-b; \\ \lambda_3 : & \quad g = b^2h - br^2, \quad k = (h+2b)^2, \quad h \geq -(a+b); \\ \lambda_4 : & \quad g = b^2h + br^2, \quad k = (h-2b)^2, \quad h \geq -(a-b), \end{aligned}$$

принадлежащие $\Sigma_2 \cap \Sigma_4$. На плоскости (s, h) эти кривые изображаются лучами

$$\begin{aligned} \lambda_1 : & \quad s = -a, \quad h \geq -(a+b); & \lambda_2 : & \quad s = a, \quad h \geq a-b; \\ \lambda_3 : & \quad s = -b, \quad h \geq -(a+b); & \lambda_4 : & \quad s = b, \quad h \geq -(a-b). \end{aligned}$$

Доказательство. Ненулевой ранг J предполагает, что $dH \neq 0$. Поскольку $dK \neq 0$, должно выполняться условие $dH = \lambda dK$ с некоторой постоянной $\lambda \neq 0$. Компонента с $\partial/\partial\omega_3$ дает $\omega_3 \equiv 0$. Из системы (1) вытекает, что такое тождество по t может иметь место только для маятниковых движений (6), (7). Значения g, k, s , а также пределы изменения h вычисляются непосредственно из выражений (3) и уравнений (5). \square

ТЕОРЕМА 3. Траектории, удовлетворяющие условиям $\text{rank } J = 1, dK = 0$ и $K \neq 0$, исчерпываются движениями (8). Их J -образ заполняет лучи

$$\begin{aligned} g &= abh, & k &= (a-b)^2, & h &\geq -(a+b), \\ g &= -abh, & k &= (a+b)^2, & h &\geq -(a-b). \end{aligned} \quad (12)$$

Часть этого множества, лежащая в Σ_4 , определяется следующими отрезками кривых в плоскости (s, h) :

$$\begin{aligned}\mu_1 : h = s - \frac{ab}{s}, s \in [-a, 0); \quad \mu_2 : h = s - \frac{ab}{s}, s \in [b, +\infty); \\ \mu_3 : h = s + \frac{ab}{s}, s \in [-a, -b]; \quad \mu_4 : h = s + \frac{ab}{s}, s \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Доказательство. В предположениях теоремы имеем $K \neq 0$, $K_{\omega_1} = K_{\omega_2} = 0$, откуда следует, что $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$. Тогда в силу системы (1) приходим к траекториям (8) и выражениям (4). Допустимые значения h в (12) вычисляются подстановкой (8) в выражение для H из (3). Подстановка же значений g, k из (4) в (5) дает искомые зависимости h от s , а допустимые значения h в (12) определяют и допустимые значения s . \square

ТЕОРЕМА 4. Траектории, удовлетворяющие условиям $\text{rank } J = 1$, $dK = 0$ и $K = 0$, исчерпываются критическими движениями гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, индуцированной на многообразии \mathfrak{M} . Эти траектории также лежат в \mathfrak{D} и порождают следующие отрезки кривых на плоскости (s, h) :

$$\begin{aligned}\delta_1 : h = 2s + \phi(s), \quad s \in [-b, 0); \\ \delta_2 : h = 2s + \phi(s), \quad s \in (0, b]; \\ \delta_3 : h = 2s - \phi(s), \quad s \in [a, +\infty),\end{aligned}\tag{13}$$

где $\phi(s) = \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)/s^2} \geq 0$.

Доказательство. Достаточно предположить, что $K = 0$. Тогда автоматически $dK = 0$, $dH \neq 0$. Следовательно $\text{rank } J \leq 2$, и ранг равен единице в точности в точках линейной зависимости dH, dG , принадлежащих $\mathfrak{M} = \{K = 0\}$. Поскольку в таких точках должны существовать (с точностью до линейного преобразования) две равные нулю независимые нетривиальные линейные комбинации dH, dG, dK , то бифуркационные поверхности Σ_1, Σ_4 должны в соответствующих точках пересекаться трансверсально. Полагая в (5) $k = 0$, получаем искомые зависимости h от s . Области изменения s вычисляются с применением предложения 3. \square

3. Описание допустимого множества. Рассмотрим поверхность Σ_1 . Несмотря на то что существование и расположение корней уравнения (10) полностью исследовано аналитически в работе [7], получить явные выражения для наибольшего положительного корня $f_0(h)$ оказывается невозможным. Заметим, что подстановки (13) позволяют параметрически выразить корни (10) в виде $(h_i(s), f_i(s))$. Отсюда, в частности, следует, что все критические точки частного интегрального отображения предложения 3 одновременно являются точками, в которых $\text{rank } J = 1$. Корень $f_0(h)$ отвечает кривой δ_1 . На ней зависимость h от s монотонно возрастающая. Обозначим ее обращение через $s_1(h)$ ($h \in [-2b, +\infty]$, $s_1(h) \in [-b, 0)$). Тогда из (9), (10) найдем выражение

$$g = g_1(h) = s^3 + \frac{ab}{s} - s^2 \phi(s)|_{s=s_1(h)}, \quad h \geq -2b.$$

Из (9) имеем также $p^2 h - 2g \geq 0$. Теперь из предложения 3 и теоремы 4 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Множество $\Sigma_1 \cap \Sigma$ имеет вид $k = 0$, $h \geq -2b$, $g_1(h) \leq g \leq \frac{1}{2}p^2 h$.

Необходимо отметить, что верхняя граница для g не является образом точек сильного падения ранга J , но она также и не принадлежит $\partial\mathfrak{G}^{(2)}$, так как через эти точки имеется гладкое продолжение $\Sigma_1 \cap \Sigma$ на поверхность Σ_2 . Наличие этой границы порождено лишь условным делением $\tilde{\Sigma}$ на Σ_i .

Обратимся к поверхности Σ_2 . Как и в предыдущем случае, здесь возникает некоторая естественная граница допустимой области, не связанная с бифуркациями внутри $c(J)$, а объясняющаяся возможностью гладкого продолжения $\Sigma_2 \cap \Sigma$ на поверхность Σ_4 . Множество точек касания поверхностей Σ_2 и Σ_4 описывается уравнением $2p^2(p^2h - 2g)^2 - 2h(p^2h - 2g)r^4 + r^8 = 0$, откуда вытекают зависимости

$$g_{\pm}(h) = \frac{1}{4p^2}[(2p^4 - r^4)h \pm r^4\sqrt{h^2 - 2p^2}].$$

Из предложения 1 следует, что $h \geq -(a+b)$. Поэтому значениями первых интегралов является лишь та часть этого множества, где $h \geq \sqrt{2}p$. При этом $g_-(h) < g_+(h)$, если $h > \sqrt{2}p$. Как показано в [9], значения $g \in (g_-(h), g_+(h))$ на Σ_2 недопустимы. Отметим еще особые значения $h = (3a^2 + b^2)/2a$, $(a^2 + 3b^2)/2b$, при которых кривые g_{\pm} касаются лучей – проекций кривых λ_2, λ_4 на плоскость (h, g) . Из теорем 1, 2 получаем следующее описание допустимого множества.

ТЕОРЕМА 6. Множество $\Sigma_2 \cap \Sigma$ лежит в полупространстве $h \geq -(a+b)$ и описывается следующей совокупностью систем неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2h - br^2 \leq g \leq a^2h + ar^2 \\ -(a+b) \leq h \leq \sqrt{2}p \end{array} \right\} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} b^2h - br^2 \leq g \leq g_-(h) \\ h \geq \sqrt{2}p \end{array} \right\} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} g_+(h) \leq g \leq a^2h + ar^2 \\ h \geq \sqrt{2}p \end{array} \right\} .$$

Для достаточно простого множества Σ_3 полное описание допустимых значений дают неравенства в (12).

На поверхности Σ_4 удобнее описывать допустимое множество в терминах переменных s, h с учетом выражений (5). На кривой δ_1 имеем уже отмеченную зависимость $s_1(h)$, $h \geq -2b$. На кривой δ_2 имеем $h'(s) < 0$. Обозначим обратную зависимость через $s_2(h)$, $h \geq 2b$, так что при этом $s_2(2b) = b$ и $s_2(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$. На кривой δ_3 уравнение $h'(s) = 0$ имеет единственное решение $s_0 \in (a, +\infty)$. Пусть h_0 – соответствующее минимальное значение h . Очевидно, $h_0 \in (a+b, 2a)$. Обозначим через $s_3(h), s_4(h)$ зависимости, определенные на кривой δ_3 для $s \in [a, s_0]$ и $s \in [s_0, +\infty)$ соответственно.

Рассматривая интервалы монотонности $s(h)$ на кривых $\mu_1 - \mu_4$, обозначим

$$s_5(h) = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \quad s_6(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \quad s_7(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 + 4ab}}{2}.$$

Суммируя утверждения теорем 1 – 4 в части, относящейся к значениям s, h , приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 7. Допустимая область $\Sigma_4 \cap \Sigma$ полностью описывается следующей совокупностью условий на плоскости (s, h) . Для отрицательных значений s :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(a+b) \leq h \leq -2\sqrt{ab} \\ s \in [-a, s_5(h)] \cup [s_6(h), -b] \end{array} \right\} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\sqrt{ab} \leq h \leq -2b \\ s \in [-a, -b] \end{array} \right\} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} h > -2b \\ s \in [-a, s_1(h)] \end{array} \right\} .$$

Для положительных значений s :

$$\begin{cases} -a + b \leq h \leq 2b \\ s \in [b, s_7(h)] \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b \leq h \leq h_0 \\ s \in [s_2(h), s_7(h)] \end{cases} ; \\ \begin{cases} h_0 \leq h \leq 2a \\ s \in [s_2(h), s_3(h)] \cup [s_4(h), s_7(h)] \end{cases} ; \quad \begin{cases} h > 2a \\ s \in [s_2(h), a] \cup [s_4(h), s_7(h)] \end{cases} .$$

Теоремы 5 – 7 дают полную информацию для построения средствами компьютерной графики сечений бифуркационной диаграммы $\Sigma(J)$ плоскостями постоянной энергии.

4. Диаграммы на изоэнергетических уровнях. Условия на постоянные первых интегралов в теоремах 1-7 записаны в терминах конкретных значений постоянной энергии h или промежутков ее изменения и содержат параметры a, b . Равенства (теорема 1) и граничные значения h в неравенствах (теоремы 2-7) дают те значения энергии, при переходе через которые в диаграмме Σ^h происходят структурные изменения. Выписав эти значения, получаем уравнения разделяющих поверхностей в пространстве $\mathbf{R}^3(h, a, b)$. Кроме того, разделяющие поверхности возникают при записи условий существования точек касания листов Σ_i в допустимой области. Всего таких поверхностей оказывается 13. Обозначим их через $Q_1 - Q_{13}$:

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_4 : h = \pm a \pm b; \quad Q_5 - Q_6 : h = \pm 2\sqrt{ab}; \\ Q_7 : h = \sqrt{2(a^2 + b^2)}; \quad Q_8 : h = \frac{1}{2a}(3a^2 + b^2); \quad Q_9 : h = \frac{1}{2b}(a^2 + 3b^2); \\ Q_{10} : \begin{cases} h = s(3 - \frac{s^2}{a^2}) - \frac{1}{a^2}\sqrt{(s^2 - a^2)^3} \\ b = \frac{s}{a}\sqrt{s[s(3 - \frac{2s^2}{a^2}) - \frac{2}{a^2}\sqrt{(s^2 - a^2)^3}]} \end{cases}, \quad s \in [a, \frac{2}{\sqrt{3}}a]; \\ Q_{11} : h = 2a; \quad Q_{12} - Q_{13} : h = \pm 2b. \end{aligned} \quad (14)$$

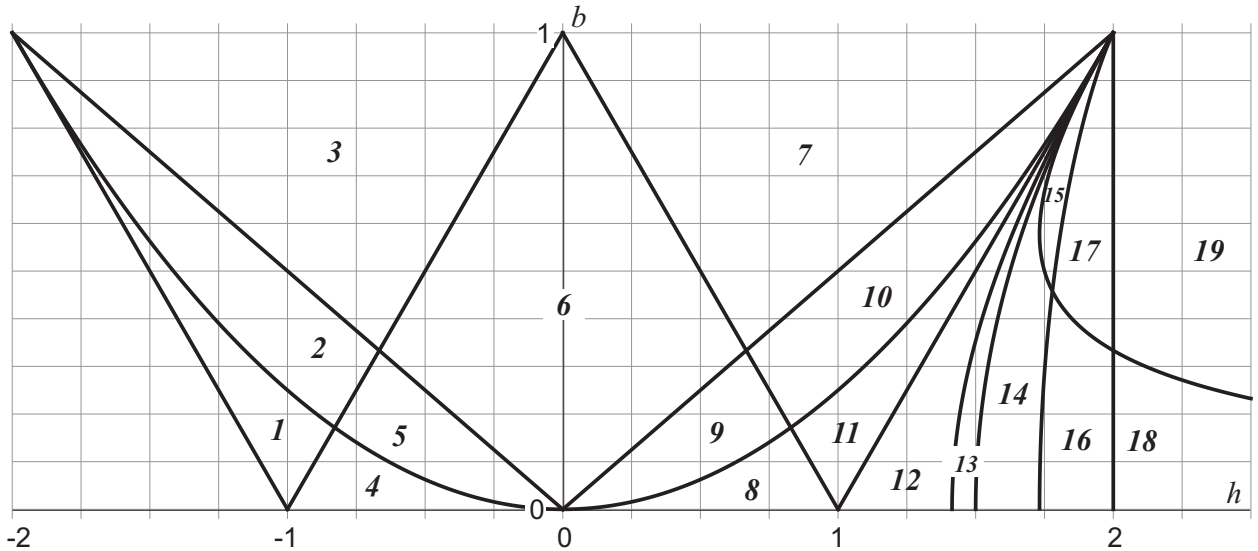


Рис. 1. Разделяющее множество в плоскости (h, b) .

Заметим, что все сечения этих поверхностей плоскостями фиксированного a переводятся в сечение $a = 1$ преобразованием подобия (подстановка $h \rightarrow ah, b \rightarrow ab$, а для

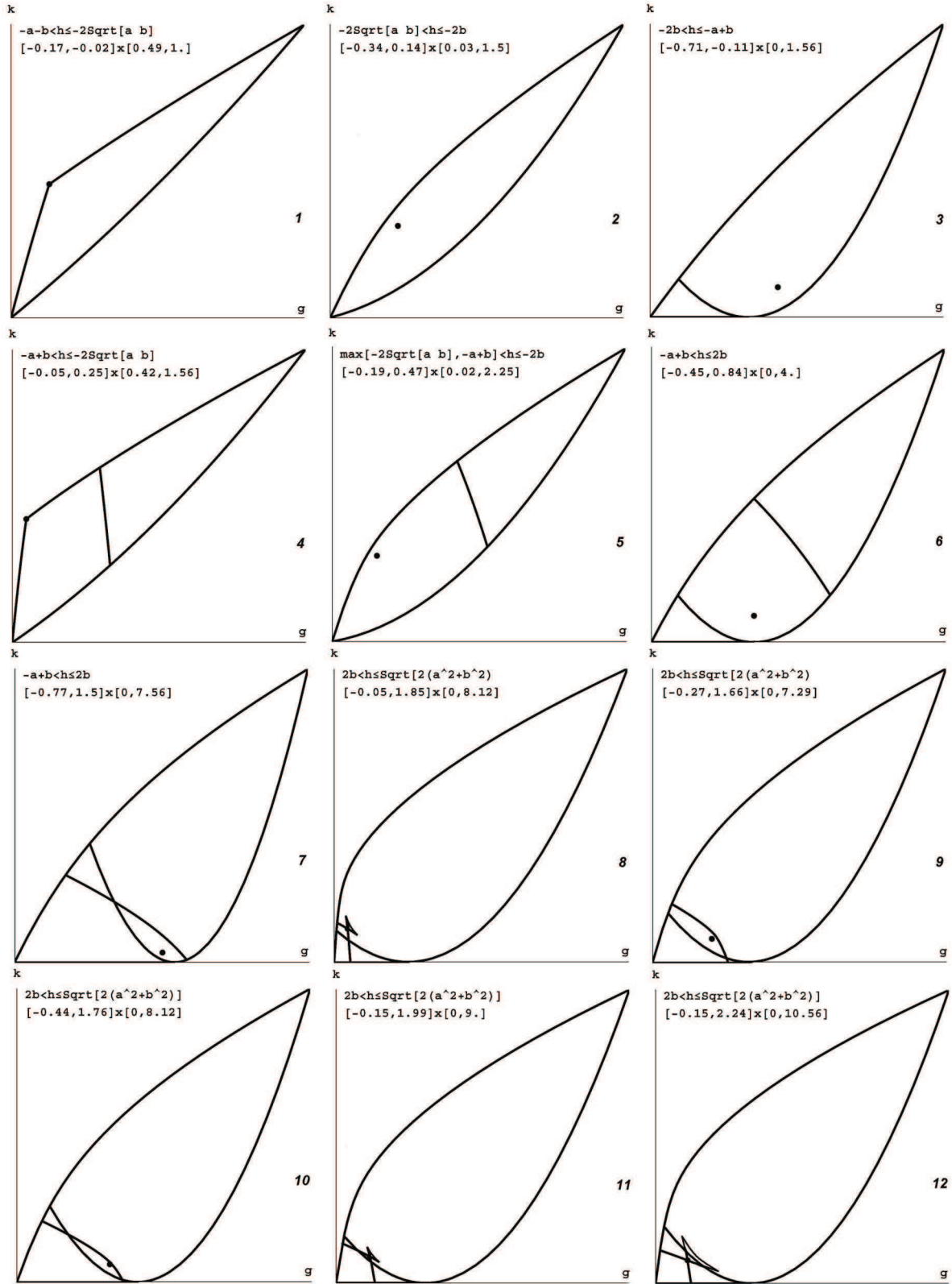


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы для областей 1-12.

параметрически заданной кривой Q_{10} еще и $s \rightarrow as$). Это очевидное следствие того факта, что величина a может быть взята за единицу измерения длин характеристических векторов силовых полей α, β . Таким образом, без ограничения общности полагаем $a = 1$. Тогда уравнения (14) определяют семейство разделяющих кривых в плоскости (h, b) . При этом $0 \leq b \leq 1$ и $h \geq -1 - b$. Поэтому имеется ровно 19 областей, в которых диаграммы Σ^h непусты и устойчивы относительно малых изменений параметров (рис. 1), что совпадает с результатом работы [14], где уравнения разделяющих кривых получены исходя из чисто геометрического рассмотрения особенностей плоских сечений поверхности $\tilde{\Sigma}$.

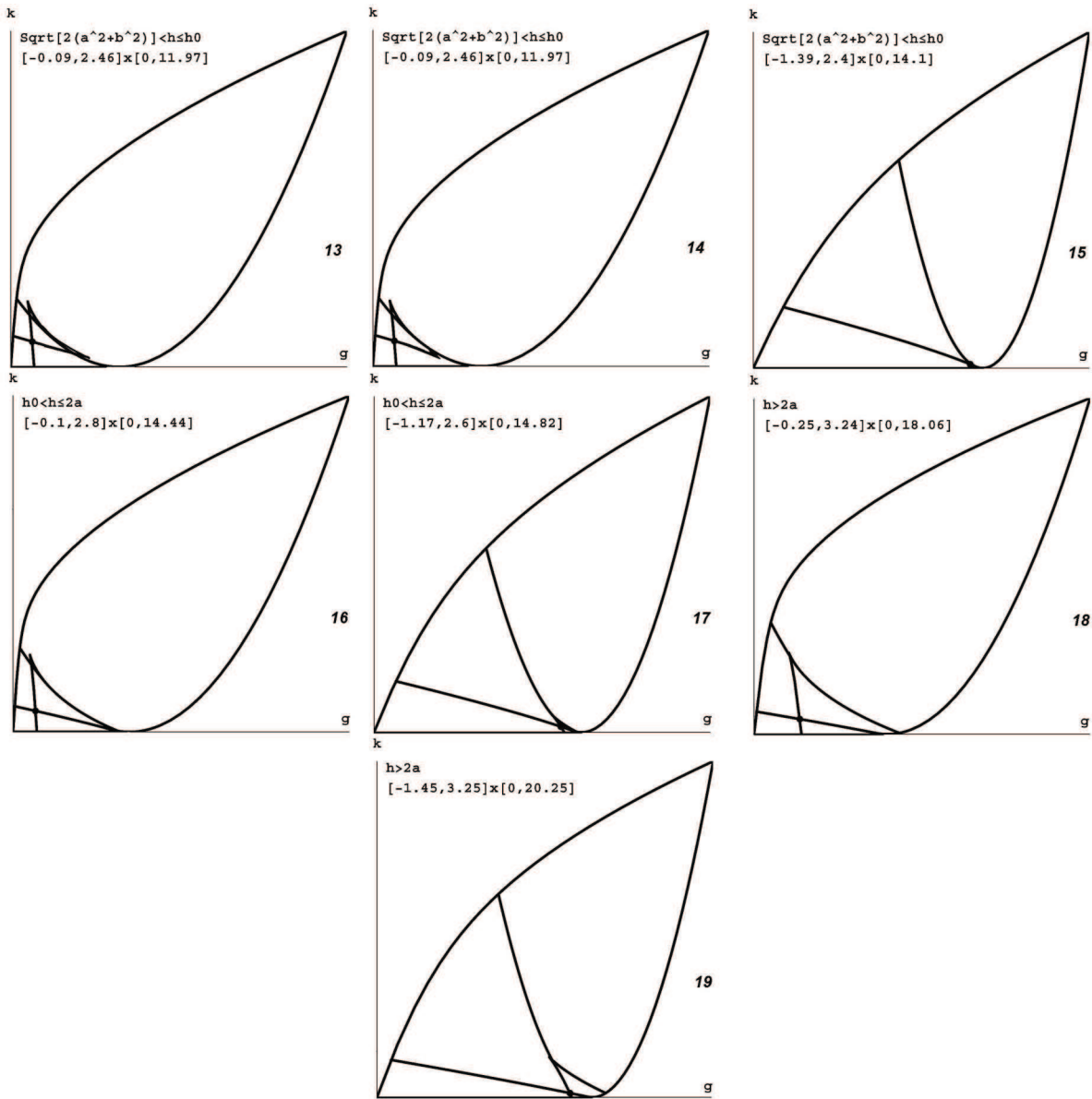


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для областей 12-19.

Полный набор типичных диаграмм показан на рис. 2, 3. Минимальные прямоугольники, обрамляющие диаграммы Σ^h , масштабированы к одному размеру изображения

(фактические границы для g и k выведены на каждый рисунок). Отдельные элементы диаграмм для областей 15–19 при показе всей диаграммы неразличимы. Однако легко построить изображение необходимых участков. Кроме того, в работе [14] описаны все явления, происходящие с особыми точками диаграмм на разделяющем множестве.

1. Харламов М.П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
2. Богоявленский О.И. Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 6. – С. 1359–1363.
3. Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А. Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функц. анализ и его приложения. – 1988. – **22**, № 2. – С. 87–88.
4. Kharlamov M.P. Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Регулярная и хаотическая динамика. – 2005. – **10**, № 4. – С. 381–398.
5. Аппельрот Г.Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – 1940. – М.; Л.: Изд-во АН СССР. – С. 61–156.
6. Ковалевская С.В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – 1940. – М.; Л.: Изд-во АН СССР. – С. 11–60.
7. Зотьев Д.Б. Фазовая топология 1-го класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – **12**, № 1. – С. 95–128.
8. Харламов М.П. Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 32–38.
9. Харламов М.П., Савушкин А.Ю., Шведов Е.Г. Бифуркационное множество в одной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 10–19.
10. Харламов М.П., Савушкин А.Ю. Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Укр. матем. вестник. – 2004. – **1**, № 4. – С. 548–565.
11. Харламов М.П. Бифуркационная диаграмма обобщения 4-го класса Аппельрота // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 38–48.
12. Харламов М.П. Общий подход к исследованию особых движений обобщенного волчка Ковалевской // Анн. докл. Пятого межд. Симпозиума по классической и небесной механике. – ВЦ РАН. – 2004. – С. 207–208.
13. Kharlamov M.P., Zotev D.B. Non-degenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields // Регулярная и хаотическая динамика. – 2005. – **10**, № 1. – С. 15–19.
14. Харламов М.П., Шведов Е.Г. Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 59–65.